www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Le problème propose la résolution d'un système infini (S) d'équations différentielles où les fonctions inconnues, supposées dérivables sur $[0, +\infty[$, sont notées p_n puis l'étude des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telles fonctions, solutions de (S) :

$$(S) \quad \begin{cases} p_0' + c_0 p_0 = 0 \\ p_1' + c_1 p_1 = c_0 p_0 \\ p_2' + c_2 p_2 = c_1 p_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ p_n' + c_n p_n = c_{n-1} p_{n-1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, supposée donnée, est constituée de constantes positives ou nulles dans les deux premières parties, constituée de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ dans la troisième partie.

Les données initiales $(p_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ constituent une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0) = 1$.

Le problème comporte des interprétations probabilistes dont un cas particulier amorce la première partie.

PARTIE I

Dans cette partie, λ est un réel strictement positif donné, ε est une fonction, également donnée, définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs strictement positives, vérifiant $\lim_{t \to 0+} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$.

Introduction probabiliste d'un système (S)

Un système radioactif comporte une source d'émissions de particules, ces émissions étant aléatoires dans le temps. On désigne par $p_n(t)$ la probabilité pour que n particules exactement soient émises dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Pour h strictement positif tel que $\lambda h + \varepsilon(h) \leqslant 1$, le nombre de particules émises dans l'intervalle $]t, t + h]$ obéit aux règles suivantes : la probabilité d'émission d'une particule unique dans cet intervalle est égale à λh, la probabilité d'émission d'un nombre de particules strictement supérieur à l'unité dans cet intervalle est égale à $\varepsilon(h)$; de plus le nombre de particules émises dans cet intervalle $]t, t + h]$ est indépendant du nombre de celles émises dans $[0, t]$. À l'instant initial $t = 0$ aucune particule n'est émise, ce qui se traduit par $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ si $n > 0$. On suppose que les fonctions p_n sont définies pour tout t réel positif et vérifient :

$$p_n(t) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1.$$

I.1. Dérivabilité des fonctions p_n.

a. Soient t un élément de $\mathbb{R}^+$, h un réel strictement positif vérifiant $\lambda h + \varepsilon(h) \leqslant 1$ et n un entier supérieur ou égal à deux. On désigne par $E_n(t, h)$, l'événement consistant en l'émission de n particules dans l'intervalle $[0, t + h]$ avec $n - 2$ d'entre elles au plus émises dans l'intervalle $[0, t]$. Montrer que la probabilité de cet événement vérifie :

$$P(E_n(t, h)) < \varepsilon(h).$$

b. Le nombre t étant donné dans $\mathbb{R}^+$, exprimer lorsque $h > 0$ et $\lambda h + \varepsilon(h) \leqslant 1$, les nombres $p_0(t + h)$ et $p_1(t + h)$ à l'aide de $p_0(t)$ et $p_1(t)$ et montrer les inégalités suivantes :

$$|p_0(t + h) - p_0(t)(1 - \lambda h)| \leqslant \varepsilon(h)$$

$$|p_1(t + h) - p_1(t)(1 - \lambda h) - p_0(t)\lambda h| \leqslant \varepsilon(h).$$

c. Soient t donné dans $\mathbb{R}^+$, n entier donné $\geqslant 2$, h vérifiant $h > 0$ et $\lambda h + \varepsilon(h) \leqslant 1$. Exprimer $p_n(t + h)$ à l'aide de $p_n(t)$, $p_{n-1}(t)$, λh, $\varepsilon(h)$ et $P(E_n(t, h))$. En déduire l'inégalité :

$$|p_n(t + h) - p_n(t)(1 - \lambda h) - p_{n-1}(t)\lambda h| \leqslant 2\varepsilon(h).$$

d. Déduire des expressions précédentes que les fonctions p_n sont continues à droite en tout point t de $\mathbb{R}^+$. Montrer également, à l'aide des inégalités précédentes, qu'elles sont dérivables à droite en tout point t de $\mathbb{R}^+$.

Tournez la page S.V.P.

e. On suppose t donné strictement positif et h vérifiant $0 < h < t$ et $\lambda h + \varepsilon(h) \leqslant 1$. En utilisant les résultats précédents, où t est remplacé par $t - h$ et le fait que les nombres $p_n(t-h)$ sont bornés, montrer que les fonctions p_n sont continues à gauche en tout point t de $]0, +\infty[$ et de même qu'elles sont dérivables à gauche au point t de $]0, +\infty[$.

I.2. Déduire de ce qui précède que les fonctions p_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elles sont solutions sur $\mathbb{R}^+$ du système différentiel (S) où les nombres c_n sont tous égaux à la constante λ.

I.3. **Résolution de (S) dans le cas $c_n = \lambda$.**

a. Déterminer les solutions p_n du système (S) lorsque les conditions initiales sont définies par $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour tout n entier strictement positif.

b. Vérifier sur les formules trouvées que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$. Reconnaître la distribution de probabilité définie par la suite $(p_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ pour chaque t strictement positif et calculer l'espérance $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, p_n(t)$.

PARTIE II

Dans cette partie, le système (S) considéré correspond au cas où (c_n) est une suite quelconque de nombres positifs ; les données initiales $(p_n(0))$ vérifiant seulement les deux propriétés :

$$p_n(0) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0) = 1.$$

On suppose, dans les questions II.1., II.2., II.3., que les nombres c_n sont égaux à une même constante λ.

II.1. Déterminer les fonctions p_n lorsque les conditions initiales sont définies par :

$$p_0(0) = p_1(0) = \frac{1}{2}, \quad p_n(0) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$

Vérifier $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire dont la distribution est définie par la suite $(p_n(t))$.

II.2. Soient deux entiers k et m donnés vérifiant $0 \leqslant k < m$. Déterminer les fonctions p_n lorsque les conditions initiales sont définies par :

$$p_k(0) = p_m(0) = \frac{1}{2}; \qquad p_n(0) = 0 \quad \text{pour tout entier } n \text{ distinct de } k \text{ et de } m.$$

II.3. On suppose toujours $c_n = \lambda$, les conditions initiales étant quelconques $\left(p_n(0) \geqslant 0 \text{ avec } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0) = 1\right)$.

a. Montrer que les solutions du système (S) sont définies par : $p_n(t) = \left[\sum_{k=0}^{k=n} p_{n-k}(0) \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] e^{-\lambda t}$.

b. On se propose dans cette question et dans la suivante de vérifier que, quel que soit $t \in]0, +\infty[$, la série $\Sigma\, p_n(t)$ est convergente, sa somme étant égale à 1. On suppose pour cela que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0)\, x^n$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. En utilisant le produit de cette série par le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto e^{t\lambda x}$ (où t est fixé strictement positif), vérifier la propriété annoncée ci-dessus.

c. Un système radioactif admet deux sources indépendantes d'émission de particules. La première source émet à l'instant initial $t = 0$ avec la distribution définie par la suite $(p_n(0))$ et la seconde source émet au cours du temps avec les mêmes règles que celles décrites dans le début de la partie I. On désigne par $q_n(t)$ la probabilité d'émission de n particules dans l'intervalle $[0, t]$ pour cette seconde source, avec les conditions initiales $q_0(0) = 1$ et $q_n(0) = 0$ pour tout $n > 0$. On désigne par X la variable aléatoire admettant pour valeur le nombre de particules émises par la première source à l'instant initial et par Y le nombre de particules émises par la deuxième source dans l'intervalle $[0, t]$. En utilisant le résultat de I.3., déterminer la loi de la variable X + Y. Expliquer pourquoi on retrouve le résultat de II.3.*a.* et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$.

II.4. Dans cette question, on suppose $c_n = n + 1$ quel que soit l'entier n, les conditions initiales étant à nouveau définies par $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$ pour $n > 0$.

a. En utilisant le système (S), déterminer les fonctions p_n.

b. Vérifier $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$ et calculer $\sum_{0}^{+\infty} n p_n(t)$.

II.5. On considère le cas général où les c_n sont des nombres réels positifs ou nuls quelconques, les conditions initiales étant quelconques $\left(\text{avec } p_n(0) \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(0) = 1\right)$.

a. Montrer que l'on peut définir les fonctions p_n sur $[0, +\infty[$ par les formules :

(1) $$\begin{cases} p_0(t) = p_0(0)\, e^{-c_0 t} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1 \\ p_n(t) = p_n(0)\, e^{-c_n t} + c_{n-1} \displaystyle\int_0^t e^{-c_n(t-u)}\, p_{n-1}(u)\, du . \end{cases}$$

On pose pour la suite $s_n(t) = p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_n(t)$.

b. Montrer que, quels que soient n et t :

(2) $$s_n'(t) + c_n p_n(t) = 0$$

(3) $$s_n(0) - s_n(t) = c_n \int_0^t p_n(u)\, du .$$

c. Montrer que les fonctions p_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et en déduire, à l'aide de la question précédente, que :

- la fonction s_n est décroissante dans $\mathbb{R}^+$;
- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t)$ est convergente quel que soit le réel positif t et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) \leqslant 1$.

II.6. Les hypothèses restent les mêmes que dans la question II.5., mais on suppose que les nombres c_n sont tous strictement positifs.

a. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout entier n et pour tout t de $\mathbb{R}^+$,

$$t\, s_n(t) \leqslant \int_0^t s_n(u)\, du , \qquad \int_0^t p_n(u)\, du \leqslant \frac{s_n(0)}{c_n} .$$

b. En déduire pour tout entier n et tout t de $\mathbb{R}^+$: $\quad t\, s_n(t) \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{c_k}$.

c. Établir que, si $\sum_{0}^{\infty} p_n(t) = 1$ quel que soit $t > 0$, alors la série de terme général $\frac{1}{c_k}$ est divergente. Cette propriété est-elle confirmée par les exemples déjà traités ?

d. On suppose que $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour tout n strictement positif. Établir les inégalités :

$$0 \leqslant \frac{1 - s(t)}{c_n} \leqslant \int_0^t p_n(u)\, du$$

$\left(\text{où } s(t) \text{ désigne la somme de la série } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t)\right)$ quels que soient n et t. En déduire que, dans ces conditions, $(1 - s(t)) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{c_k} \leqslant t$. Établir, sous les conditions initiales considérées, la réciproque de la propriété énoncée en *c.*).

Tournez la page S.V.P.

II.7. On suppose encore $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$ pour $n > 0$ et de plus que les nombres c_n sont strictement positifs et distincts deux à deux.

a. En utilisant par exemple les formules (1), montrer que les fonctions p_n sont définies par :

$$\begin{cases} p_0(t) = e^{-c_0 t} \\ p_n(t) = (-1)^n c_0 c_1 \cdots c_{n-1} \sum_{i=0}^{i=n} a_{n,i} e^{-c_i t} \end{cases}$$

où les $a_{n,i}$ sont des nombres vérifiant les relations :

(4)
$$\begin{cases} (c_i - c_{n+1}) a_{n+1,i} = a_{n,i} \quad (i \leqslant n) \\ \sum_{i=0}^{i=n} a_{n,i} = 0 \quad \text{et} \quad a_{1,0} = \dfrac{1}{c_0 - c_1}. \end{cases}$$

b. Soit α un réel strictement positif donné, on suppose que la suite (c_n) est définie par $c_n = n + \alpha$. Vérifier que, quels que soient n et $i \leqslant n$, les coefficients $a_{n,i}$ sont définis par :

$$a_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!\, i!}.$$

Montrer, à l'aide de ce qui précède, que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$. En déduire le développement en série entière pour $|u| < 1$ de $(1-u)^{-\alpha}$.

PARTIE III

Dans cette dernière partie, les coefficients c_n sont des fonctions continues de t, strictement positives dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Les conditions initiales sont encore définies par $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$ pour tout entier $n > 0$. On se limite à deux exemples.

III.1. On suppose que les fonctions c_n sont déterminées sur l'intervalle $I = [0, 1[$ par $c_n(t) = \dfrac{n+1}{1-t}$.

a. Déterminer les fonctions p_n.

b. Montrer que, pour tout t de I, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$.

III.2. On suppose que les fonctions c_n sont déterminées sur $I = [0, 1[$ par $c_n(t) = \dfrac{n+\alpha}{1-t}$ où α est un nombre réel strictement positif donné.

a. Déterminer les fonctions p_n.

b. Montrer que, pour tout réel t de I, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$. (On pourra utiliser le développement de $(1-u)^{-\alpha}$ trouvé dans II.7.*b.*).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail